$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

EJ1

$\frac{26}{27}$

$$\begin{bmatrix} {}_m A & {}_m B \\ {}_n 0 & {}_n C \end{bmatrix} m+n$$

a) $Av = \lambda v$ $(v \in \mathbb{R}^m)$.

QPQ $\exists\, w \in \mathbb{R}^n \,/\, M \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$

$$M \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v + Bw \\ Cw \end{bmatrix} \overset{\text{Bueno}}{=} \begin{bmatrix} \lambda v \\ \lambda w \end{bmatrix}$$

Necesito que $Bw = 0$ y que $Cw = \lambda w$

Si tomo $w = 0$ se cumplen las condiciones

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\to$ Como $\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ no es nulo, pues v autovector entonces $\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ autovector de M ✓

Nota: Con las dimensiones propuestas todas las multiplicaciones son posibles

b) En este caso tenemos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ \lambda w \end{bmatrix} \overset{\text{Bueno}}{=} \begin{bmatrix} \lambda v \\ \lambda w \end{bmatrix}$$

Necesito que $Av + Bw = \lambda v$

$\iff (A - \lambda \underset{m\times m}{I})v = -Bw$

Por enunciado sabemos que λ <u>no</u> es autovalor de A, por lo que $\det(A - \lambda I) \neq 0$ (recordemos que A es cuadrada).

entonces, $A - \lambda I$ es inversible.

Luego $Av + Bw = \lambda v \iff -(A - \lambda I)^{-1} Bw = v$

llamando $y = -Bw$, existe un único v tal que $(A - \lambda I)^{-1} \cdot y = v$ porque $(A - \lambda I)$ es inversible.* ✓

Con el mismo razonamiento que antes, $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ no es nulo sin importar v porque w autovector

* El argumento de inversibilidad de $(A - \lambda I)$ sirve para escribir a v como $v = Gw$, con G una matriz. Ahora, si G es inversible o no, no importa. Dado el w fijo, el v será único

c) Sabemos que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av + Bw \\ Cw \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{con } \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \neq 0$$

QpQ entonces, o bien v autovector de A o bien w autovector de C (el que sea, con autovalor λ).

Siguiendo la sugerencia: Si $w=0$ sabemos que $v \neq 0$ por autovector

y en dicho caso $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces, como $v \neq 0$ y $Av = \lambda v \Rightarrow v$ autovector de A. con autovalor λ ✓

Ahora, si $w \neq 0$

$\begin{cases} Av + Bw = \lambda v \\ Cw = \lambda w \end{cases} \Rightarrow$ Como $w \neq 0$, w autovector de C con autovalor λ ✓

Entonces, si $w = 0 \Rightarrow v$ autovector de A con autovalor λ

Si no, $\Rightarrow w$ autovector de C con autovalor λ

No sabemos que pasa con A en el segundo caso pero no nos importa, porque sabemos que ocurre una cosa o la otra (al menos). ✓

Falta justificar la conclusion al final del ejercicio

Va a utilizar una factorización SVD de A, que siempre existe.
Sean $u_1, \ldots, u_m$ son las col de U y los $v_1, \ldots, v_n$ las col de V.

Asumo como sabido que como las col de U y V son ort
entonces $V^t(v_1 + \cdots + v_n) = e_1 + \cdots + e_n$.
En Σ tenemos los VS de A en orden decreciente.

a) QpQ $\|A\|_2 = \sigma_1$

$$\|A\|_2 = \|U\Sigma V^t\|_2 = \|\Sigma V^t\|_2 = \max_{x/\|x\|_2=1} \|\Sigma V^t x\|_2$$

como U es ortogonal, no modifica la norma

Como las col de V forman una base, puedo escribir a x como
$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

Ahora notemos que si $\|x\|_2 = 1 \iff \|V^t x\|_2 = 1 \iff$

como V^t ortogonal, no modifica la norma

$$\iff \|V^t(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)\|_2 = 1 = \|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\|_2 = \boxed{\sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = 1}$$

Si $\|x\|_2 = 1$ podemos afirmar esto.

Volvamos ahora entonces a $\|A\|_2$ y veamos que pasa con $\|\Sigma V^t x\|_2$

$$\|\Sigma V^t x\|_2 = \|\Sigma V^t(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)\|_2 = \|\Sigma \alpha_1 e_1 + \cdots + \Sigma \alpha_n e_n\|_2 =$$

$$= \|\sigma_1 \alpha_1 e_1 + \cdots + \sigma_n \alpha_n e_n\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \alpha_i^2}$$

Estricto para el rango
Ahora, como los VS están ordenados y $\sigma_i^2 \geq 0$ y $\alpha_i^2 \geq 0$
Podemos decir que $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \alpha_i^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$

Luego como la raíz cuadrada es estrictamente creciente en todo su rango, entonces $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \alpha_i^2} \leq \sqrt{\sigma_1^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$

Como para la $\|A\|_2$ buscamos el x con $\|x\|_2 = 1$ que maximice $\|\Sigma V^t x\|_2$, y esto hace que $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2} = 1$

podemos decir que $\|A\|_2 = \|\Sigma V^t\|_2 = \max_{x / \|x\|_2 = 1} \|\Sigma V^t x\|_2 \leq \sigma_1$

Es decir que, en el mejor de los casos, ese máximo es σ_1

Pero si $x = v_1$ entonces $\|x\|_2 = \|v_1\|_2 = 1$ por ser base ortonormal

~~y $\|A\|_2 = \|\Sigma V^t\|_2$~~

y $\|\Sigma V^t v_1\|_2 = \|\Sigma e_1\|_2 = \|\sigma_1 e_1\| = \boxed{\sigma_1}$

Entonces $\|A\|_2 = \|\Sigma V^t v_1\|_2 = \sigma_1$ como quería probar.

b) Sabemos que $A^t A = V\Sigma^t \Sigma V^t$ $\quad (\Sigma^t\Sigma \in \mathbb{M}^{n\times n})$

$\Sigma^t\Sigma$ tiene la pinta $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{\min(m,n)}^2 & \\ & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ → Si $m \geq n$ no habrá ceros ~~extra~~ (más allá de los propios de los valores singulares), y si $m < n$ aparecen estos 0 en el costado.

Luego $\Sigma^t\Sigma V^t = \begin{bmatrix} -- \sigma_1^2 v_1 -- \\ \vdots \\ -- \sigma_n^2 v_n -- \end{bmatrix}$ → Asumo $m \geq n$, si no, las últimas filas son 0.

Como $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^tA)} = \sqrt{tr(V\Sigma^t\Sigma V^t)}$, sabemos por propiedad que $tr(AB) = tr(BA)$ entonces

$\|A\|_F = \sqrt{tr(\Sigma^t\Sigma V^t . V)}$

b) Continuación

Vemos entonces como se ve

$$\Sigma^t \Sigma V^t . V = \begin{bmatrix} - & - & \sigma_1^2 v_1^t & - & - \\ & & \vdots & & \\ - & - & \sigma_n^2 v_n^t & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Recordemos que si $m<n$ entonces tiene estos 0 abajo pero no nos afecta demasiado al razonamiento

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonales, solo sobreviven los diagonales

Entonces $\Sigma^t \Sigma \underbrace{V^t . V}_{= I \text{ por ortogonal}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ & \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & & \end{bmatrix}$

→ Escribo los 0 que aparecen si $m<n$, también existen por los σ_i que sean 0 de cualquier forma.

Entonces, sabemos que la traza de $A^t A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2$ → Los demás son 0

Y luego $\|A\|_F = \sqrt{tr(A^t A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$ Como queríamos probar.

c) Sabemos por la P1 que $\|y\|_\infty \le \|y\|_2$

Y sabemos que

$\|A\|_\infty = \max_{x/\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \le \max_{x/\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_1$ (ej a)

Entonces sabemos que $\|A\|_\infty \le \sigma_1$

Pero $\|A\|_\infty = \max_{x/\|x\|}$ No va

$\max_i |a_{ii}| = \max_i |e_i^t A e_i| = \max_i |e_i^t U \Sigma V^t e_i| \overset{*}{=} \max_i | u_{i}$

$\rightarrow$ Como u_{ii} y $v_{ii} \leq 1$ porque $\|v_i\|_2 = 1$ y $\|u_i\|_2 = 1$ $\forall i$

entonces $\max_i |a_{ii}| \leq \max_i |\sigma_i| = \sigma_1$ ✗ No va.

Luego $\max_i |a_{ii}| \leq \sigma_1$ como quería probar

$*$ $$[0 \cdots 0 1 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_m \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\min(n,m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & v_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & v_n & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_i^t U \Sigma V^t e_i = u_i^t \Sigma \begin{bmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix} = u_i^t \begin{bmatrix} \sigma_1 v_{1i} \\ \vdots \\ \sigma_n v_{ni} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \sigma_j \cdot v_{ji}$$

$e_i^t U = \text{fil}_i(U)$

$V^t e_i = \text{col}_i(V^t) = \text{fil}_i(V)$

Si tomo el σ_j mayor que es σ_1 me queda

No me salió y ya no tengo tiempo, pero la intención estuvo...

EJ3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix}}_{x^{(k+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ D^{-1}C & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}}_{x^{(k)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} A^{-1} b_1 \\ D^{-1} b_2 \end{bmatrix}}_{c}$$

Entonces si lo calculamos, efectivamente nos queda el sistema

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = A^{-1}B\, x_2^{(k)} + A^{-1} b_1 \\ x_2^{(k+1)} = D^{-1}C\, x_1^{(k)} + D^{-1} b_2 \end{cases}$$

B

b) Evaluamos el límite, si $x_1^{(k)} \to x_1$ y $x_2^{(k)} \to x_2$

Tenemos que $\begin{cases} x_1 = A^{-1}B\, x_2 + A^{-1} b_1 \\ x_2 = D^{-1}C\, x_1 + D^{-1} b_2 \end{cases}$ → Es decir, si el sistema converge, lo hace a estos valores.

¿por qué?

¿JUSTIFICACIÓN?

si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

El sistema que queríamos solucionar originalmente era

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$ → Del cual extraemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} A x_1 - B x_2 = b_1 \\ -C x_1 + D x_2 = b_2 \end{cases}$$

Por enunciado, A y D son invertibles, entonces podemos despejar:

$A x_1 - B x_2 = b_1 \iff x_1 = A^{-1} b_1 + A^{-1} B x_2$

$-C x_1 + D x_2 = b_2 \iff x_2 = D^{-1} b_2 + D^{-1} C x_1$

Entonces tenemos el sistema equivalente $\begin{cases} x_1 = A^{-1}B\, x_2 + A^{-1} b_1 \\ x_2 = D^{-1}C\, x_1 + D^{-1} b_2 \end{cases}$

Que es justamente a lo que llegamos evaluando límite del método iterativo

Por lo tanto, si el método iterativo propuesto converge, lo hace a la solución del sistema

B-

c) Voy a tratar de calcular los autovalores de B. Sabemos por la teoría que como el método iterativo es del estilo de $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, entonces converge $\forall x^{(0)}$ inicial si $\rho(B) < 1$. ✓

sii

Calculamos A^{-1}:

$$AA^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3a}{5} - \frac{4c}{5} = 1 \iff a = (5+4c)/3 \iff \frac{5 - 16/5}{3} = \boxed{a = 3/5} \\ \frac{3b}{5} - \frac{4d}{5} = 0 \iff b = 4d/3 \iff \boxed{b = 4/5} \\ \frac{4a}{5} + \frac{3c}{5} = 0 \iff (20+16c)/3 = -3c \iff \boxed{c = -4/5} \\ \frac{4b}{5} + \frac{3d}{5} = 1 \iff \frac{16d}{15} + \frac{3d}{5} = 1 \iff \boxed{d = 3/5} \end{cases}$$

Verificamos

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ✓ ✓$$

$$DD^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{D^{-1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ✓ ✓$$

Luego

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 18/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} ✓$$

$$D^{-1} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ✓$$

Entonces
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ✓$$

) Continuación

...mos ahora entre los λ tales que

$\det(B-\lambda I)=0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 5 & 18/5 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=0 \iff -\lambda \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 18/5 \\ 0 & -\lambda & 1/5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$\iff -\lambda\left((-\lambda)^3+\lambda/5\right)=0 \quad \boxed{\lambda_1=0}$$

$$(-\lambda)^3=\frac{-1}{5} \iff \lambda=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4}$$

no

despejaste mal

Luego, el radio espectral de B es: $\rho(B)=\left|1/\sqrt[3]{5}\right|\simeq 0{,}5848<1$

Entonces, el esquema iterativo converge $\forall x^{(0)}$ inicial.

B-

d) Veamos cómo queda M:

$$M=\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & -3 & -2 \\ 4/5 & 3/5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Vemos que M tiene 0's en la diagonal, por lo que no es posible plantear Jacobi ni Gauss-Seidel porque ni la diagonal ni la diagonal − L serán inversibles.

OK

B

Estamos buscando las columnas del estilo

$f(x_i, y_i) = \alpha(x_i^2 + y_i^2) + \beta$ para las 5 mediciones

Se puede expresar de forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3,7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,76 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{bmatrix}}_{b}$$

Es decir, $A = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces, lo que buscamos resolver es $Ax = b$

Las ecuaciones normales nos indican que la solución de CM del problema cumple que

$A^t A x = A^t b$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3,7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3,7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49,69 & 13,7 \\ 13,7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^t b = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3,7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,76 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,57 \\ 1,46 \end{bmatrix}$$

Sabemos que CM siempre tiene sol, y como en este caso el rango de $A^t A$ es máximo (las col son li, pues no son múltiplos), entonces la solución es única

b) Como ya dijimos, el x que cumple ecuaciones normales es la sol de CM del sistema, por ende, resolvemos con lo que ya calculamos

Buscamos $A^t A x = A^t b$

$$\begin{bmatrix} 49,69 & 13,7 \\ 13,7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,57 \\ 1,46 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 49,69\alpha + 13,7\beta = 1,57 & \rightarrow \alpha = \dfrac{1,57 - 13,7\beta}{49,69} \\ 13,7\alpha + 5\beta = 1,46 & \rightarrow \alpha = \dfrac{1,46 - 5\beta}{13,7} \end{cases}$$

$\Rightarrow (1,57 - 13,7\beta)\, 13,7 = (1,46 - 5\beta)\, 49,69 \iff$

$\iff 21,509 - 187,69\beta = 72,5474 - 248,45\beta$

$\iff 60,76\beta = 51,0384$

$\iff \boxed{\beta = 0,84}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{1,46 - 5\cdot(0,84)}{13,7} \iff \boxed{\alpha = -0,2}$

$\Rightarrow$ La solución al problema en el sentido de CM es la propuesta.

Es decir que $f(x,y) = -0,2(x^2+y^2) + 0,84$ (Para CM)

c) Considero $E = \|Ax - b\|_2$

Entonces: $Ax - b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3,7 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,76 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 - 0,76 \\ -0,8 + 0,84 \\ -0,8 + 0,84 \\ -0,74 + 0,84 - 0,1 \\ -0,4 + 0,84 - 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ 0 \\ -0,16 \end{bmatrix}$

Luego $E = \sqrt{0,08^2 + 0,04^2 + 0,04^2 + 0,16^2} = \sqrt{0,0352} \approx 0,187617$

d) y e) Si evaluamos los puntos con los valores de α y β que conseguimos es decir con nuestra función tenemos que

x	0	2	0	1,7	1
y	0	0	2	0,9	1
$f(x,y)$	0,84	0,04	0,04	0,1	0,44

d y e) Continuación

...mos que para los puntos 2,3 y 4, el resultado da muy cercano pero para los puntos 1 y 5 da más lejos (0,76 vs 0,84 y 0,6 vs 0,44)

Si tomamos los datos 1,2 y 3 como correctos, es preocupante que para el dato 1 de tan alejado. Esto lo asocio a que CM trató de adaptarse a los datos 4 y 5 que pueden ser imprecisos.

Considero que no se deberían tomar con demasiada seriedad estos resultados y que quizás podemos tener una mejor aproximación si solo tomamos los primeros 3 medidas para el cálculo, si realmente confiamos en que estos son correctos.